Date

2005年　東大数学　文系第2問

一般に、隣り合う2整数は互いに素である。

証明　自然数nに対し

$n+1 = 1 \times n + 1$ とすると、

ユークリッドの互除法により、

n+1とnの最大公約数が、nと1の最大公約数に等しい。

nと1の最大公約数は1なので、

n+1とnの　：も1となり、つまり互いに素である。

$a^2 - a = a(a-1)$ が $10000 = 2^4 \times 5^4$ で割り切れる。

aとa-1が互いに素で、aが奇数、a-1が偶数であることから、

$$\begin{cases} a \text{は} 5^4 \text{の倍数} \\ a-1 \text{は} 2^4 \text{の倍数} \end{cases}$$ である。

よって $a = 5^4 c$　$a-1 = 2^4 d$ とおける。

aを消去して、

$5^4 c - 2^4 d = 1$

$625c - 16d = 1$

ユークリッドの互除法でc, dを求める

$625 = 16 \times 39 + 1$ なので、

$625 \div 16 = 39$ あまり1なので、

$$\begin{array}{l} 625c - 16d = 1 \\ 625 \times 1 - 16 \times 39 = 1 \\ \hline \end{array}$$

$625(c-1) - 16(d-39) = 0$

$625(c-1) = 16(d-39)$

625と16は互いに素なので、

$$\begin{cases} c-1 = 16k \\ d-39 = 625k \end{cases}$$ とおける。

よって $a = 5^4 c = 5^4(16k+1) = 10000k + 625$

$1 \leqq a \leqq 9999$ なので　これを満たすaは

$k=0$ のときの $a = 625$

このとき

$a(a-1) = 625 \times 624 = 2^4 \times 5^4 \times 39$ で

確かに10000で割り切れる。

よって $a = 625$ //